

Mathematische Strukturen

– Lösungshinweis –

? Mathematische Strukturen – Körper und

Mit Zahlen, insbesondere mit den reellen Zahlen, kann man rechnen. Die vier Grundrechnungsarten – Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division – folgen bestimmten Regeln, die Sie bereits kennengelernt haben. Doch was passiert, wenn wir über die reellen Zahlen hinausblicken? Es gibt viele andere Mengen von Zahlen, auf denen ähnliche Rechenoperationen möglich sind und die denselben oder leicht veränderten Regeln folgen. In der Mathematik suchen wir nach Strukturen, die uns helfen, komplexe Zusammenhänge zu verstehen. Mit den Begriffen Gruppen und Körper können wir genau diese Strukturen beschreiben und Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Mengen systematisieren.

Definition 1 – Gruppe

Eine Gruppe $(G, *)$ ist ein Paar aus einer Menge G und einer Verknüpfung $*$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $*$: $G \times G \rightarrow G$ (Abgeschlossenheit)
- Es gilt das Assoziativgesetz, d.h. es ist $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c \in G$
- Es gibt ein *neutrales Element* $e \in G$ für die Verknüpfung $*$, d.h. es ist $e * a = a * e = a$ für alle $a \in G$
- Zu jedem $a \in G$ gibt es ein *inverses Element* $b \in G$ mit $a * b = b * a = e$

Eine Gruppe $(G, *)$ heißt **abelsche** oder **kommutative Gruppe**, falls zusätzlich das **Kommutativgesetz** gilt.

Definition 2 – Körper

Ein **Körper** ist eine algebraische Struktur, die sowohl die Addition als auch die Multiplikation vollständig integriert. Ein Körper $(K, +, \cdot)$ hat die folgenden Anforderungen:

- Mit der Verknüpfung $+$ ist K eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element dieser Verknüpfung wird mit 0 bezeichnet und heißt die Null von K .
- Die Menge $K \setminus \{0\}$ mit der Verknüpfung \cdot ist eine abelsche Gruppe, und diese Verknüpfung ist auf der gesamten Menge K kommutativ. Das neutrale Element dieser Verknüpfung wird mit 1 bezeichnet und heißt die **Eins** von K .

iii. Es gilt das **Distributivgesetz**: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

- Geben Sie Paare von Zahlenmengen und Rechenoperationen an. Nennen Sie jeweils das neutrale Element und geben Sie Inverse an.
- Geben Sie für jede der vier Eigenschaften ein Paar an, das diese nicht erfüllt und somit keine Gruppe ist.
- Welche Gruppen bilden mit einer weiteren Rechenoperation einen Körper? Welche dieser Paare können nicht zu einem Körper erweitert werden? Geben Sie jeweils die Null von K sowie die Eins von K an.

a)

| Menge | Verknüpfung/Operation | Neutrales Element | Inverse |
|--------------|-----------------------|-------------------|---|
| \mathbb{Z} | + | 0 | $-a$ ist das Inverse zu a ; $a \in \mathbb{Z}$ |
| \mathbb{Q} | + | 0 | $-a$ ist das Inverse zu a ; $a \in \mathbb{Q}$ |
| \mathbb{Q} | \cdot | 1 | $\frac{1}{a}$ ist das Inverse zu a ; $a \in \mathbb{Q}$ |
| \mathbb{R} | + | 0 | $-a$ ist das Inverse zu a ; $a \in \mathbb{R}$ |
| \mathbb{R} | \cdot | 1 | $\frac{1}{a}$ ist das Inverse zu a ; $a \in \mathbb{R}$ |

b)

| Menge | Verknüpfung/Operation | Eigenschaft | Begründung |
|-------------------|-----------------------|-------------------|--|
| $2\mathbb{N} + 1$ | + | Abgeschlossenheit | $3 + 3 = 6 \notin 2\mathbb{N} + 1$ |
| \mathbb{Q} | : (Division) | Assoziativgesetz | |
| \mathbb{N} | + | Neutrales Element | $0 \notin \mathbb{N}$ |
| \mathbb{Z} | . | Inverses Element | $\frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$ für $a \neq 1$ |

c)

| Menge | Verknüpfung/Operation | Null von K | Eins von K | |
|--------------|-----------------------|------------|------------|-------------|
| \mathbb{Z} | + | 0 | 1 | Kein Körper |
| \mathbb{Q} | + | 0 | 1 | Körper |

